第 11 講　数学Ⅲ ― その2 ―

43　$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における $\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ の最大値を求めよ．ただし $\pi > 3.1$ および $\sqrt{3} > 1.7$ が成り立つことは証明なしに用いてよい．

《13 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

44　xy 平面内で，y 軸上の点 P を中心とする円 C が 2 つの曲線

$$C_1 : y=\sqrt{3}\log(1+x),\ C_2 : y=\sqrt{3}\log(1-x)$$

とそれぞれ点 A，点 B で接しているとする．さらに △PAB は A と B が y 軸に関して対称な位置にある正三角形であるとする．このとき 3 つの曲線 C, C_1, C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ．ただし，2 つの曲線がある点で接するとは，その点を共有し，さらにその点において共通の接線をもつことである．

《13 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

45　双曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ の第 1 象限にある部分と，原点 O を中心とする円の第 1 象限にある部分を，それぞれ C_1，C_2 とする．C_1 と C_2 は 2 つの異なる点 A，B で交わり，点 A における C_1 の接線 l と線分 OA のなす角は $\dfrac{\pi}{6}$ であるとする．このとき C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ．

《14 京大・理系》

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

46　a を正の実数とする．座標平面において曲線 $y=\sin x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を S とし，曲線 $y=\sin x\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$，曲線 $y=a\cos x\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ および x 軸で囲まれた図形の面積を T とする．このとき $S : T=3 : 1$ となるような a の値を求めよ．

《10 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第11講　数学Ⅲ ―その2―

43　$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における $\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ の最大値を求めよ．ただし $\pi > 3.1$ および $\sqrt{3} > 1.7$ が成り立つことは証明なしに用いてよい．

《13京大・理系》

【答】 $\dfrac{\sqrt{3}\,\pi^2}{16}$

【解説】 $f(x) = \cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ とおく．

$f(-x) = \cos(-x) + \dfrac{\sqrt{3}}{4}(-x)^2 = \cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2 = f(x)$ より $f(x)$ は偶関数なので

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ について考える．

$f'(x) = -\sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$，$f''(x) = -\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より $f'(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		↘		↗	

となる．

ここで $f'(0) = 0$，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}\,\pi - 4}{4} > \dfrac{1.7 \times 3 - 4}{4} = \dfrac{1.1}{4} > 0$ より $f'(x) = 0$ の $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ における実数解は1つだけで，それを α とおくと $f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

となる．

このとき $f(0) = 1$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}\,\pi^2}{16} > \dfrac{1.7 \times 3.1^2}{16} = \dfrac{16.337}{16} > 1$ である．

以上より求める最大値は $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}\,\pi^2}{16}}$ $\left(x = \pm\dfrac{\pi}{2}\right)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$\boxed{44}$ xy 平面内で，y 軸上の点 P を中心とする円 C が 2 つの曲線

$$C_1 : y=\sqrt{3}\log(1+x),\ C_2 : y=\sqrt{3}\log(1-x)$$

とそれぞれ点 A，点 B で接しているとする．さらに △PAB は A と B が y 軸に関して対称な位置にある正三角形であるとする．このとき 3 つの曲線 C，C_1，C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ．ただし，2 つの曲線がある点で接するとは，その点を共有し，さらにその点において共通の接線をもつことである．

《13 京大・理系》

【答】 $8\sqrt{3}-2\sqrt{3}\log 3-\dfrac{8}{3}\pi$

【解説】 $f(x)=\sqrt{3}\log(1+x)$，$g(x)=\sqrt{3}\log(1-x)$ とおくと
$f(-x)=\sqrt{3}\log(1-x)=g(x)$ なので，C_1 と C_2 は y 軸対称なグラフをもつ．

よって $A(\alpha,\ \sqrt{3}\log(1+\alpha))$，$B(-\alpha,\ \sqrt{3}\log(1+\alpha))\ (\alpha>-1)$ とおける．

$f'(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{1+x}>0$ なので，題意より直線 PA の傾きが $-\sqrt{3}$ になればよい．

$$f'(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{3}} \iff \frac{\sqrt{3}}{1+\alpha}=\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \therefore\ \alpha=2$$

ここで AB の中点を M とすると，MA＝2 より MP＝$2\sqrt{3}$ つまり円 C の半径は 4 となるので，y 軸に関する対称性より求める面積は

$$2\left\{(\triangle \text{APM の面積})+(\text{OM と AM で作られる長方形の面積}) -\int_0^2\sqrt{3}\log(1+x)dx-4^2\pi\times\frac{1}{12}\right\}$$

$$=2\left\{\frac{2\sqrt{3}\times 2}{2}+2\times\sqrt{3}\log 3-\sqrt{3}\Big[(1+x)\log(1+x)-x\Big]_0^2-\frac{4}{3}\pi\right\}$$

$$=\mathbf{8\sqrt{3}-2\sqrt{3}\log 3-\frac{8}{3}\pi}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

45 双曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ の第 1 象限にある部分と，原点 O を中心とする円の第 1 象限にある部分を，それぞれ C_1，C_2 とする．C_1 と C_2 は 2 つの異なる点 A，B で交わり，点 A における C_1 の接線 l と線分 OA のなす角は $\dfrac{\pi}{6}$ であるとする．このとき C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ．

《14 京大・理系》

【答】 $\dfrac{2}{3}\pi-\log(2+\sqrt{3})$

【解説】 $y=\dfrac{1}{x}$ のとき $y'=-\dfrac{1}{x^2}$ より $\mathrm{A}\left(\alpha,\ \dfrac{1}{\alpha}\right)$，$\mathrm{B}\left(\beta,\ \dfrac{1}{\beta}\right)$ $(0<\alpha<\beta)$ とおくと接線 l の傾きは $-\dfrac{1}{\alpha^2}$ より接線の方向ベクトルは $\vec{l}=(-\alpha^2,\ 1)$ とおけ，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\alpha,\ \dfrac{1}{\alpha}\right)$ より

$$
\begin{aligned}
\vec{l}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=|\vec{l}\,||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cos\frac{\pi}{6} \quad &\Longleftrightarrow \quad -\alpha^3+\frac{1}{\alpha}=\sqrt{\alpha^4+1}\sqrt{\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&\Longleftrightarrow \quad 2(1-\alpha^4)=\sqrt{3}(\alpha^4+1)\\
&\Longleftrightarrow \quad \alpha^4=(2-\sqrt{3})^2\\
&\Longleftrightarrow \quad \alpha^4=\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^4
\end{aligned}
$$

となるが，$\alpha>0$ より $\alpha=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

よって $\mathrm{A}\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$, $\beta=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ となり，

$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=2$，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$ より，求める面積は

$$
\begin{aligned}
\left(2^2\pi\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)-\left(\int_\alpha^\beta\frac{1}{x}dx+\frac{1}{2}\alpha\beta\right) &= \frac{2}{3}\pi-\Big[\log x\Big]_\alpha^\beta\\
&= \frac{2}{3}\pi-\log\frac{\beta}{\alpha}\\
&= \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi-\log(2+\sqrt{3})}
\end{aligned}
$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

46　a を正の実数とする．座標平面において曲線 $y=\sin x\,(0\leqq x\leqq \pi)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を S とし，曲線 $y=\sin x\left(0\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$，曲線 $y=a\cos x\left(0\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ および x 軸で囲まれた図形の面積を T とする．このとき $S:T=3:1$ となるような a の値を求めよ．

《10 京大・理系》

【答】 $a=\dfrac{4}{3}$

【解説】 $S=\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=2$ と $S:T=3:1$ より $T=\dfrac{2}{3}$.

これと $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$ より曲線 $y=\sin x\left(0\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$，$y=a\cos x\left(0\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ および直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた図形の面積が $1-T=\dfrac{1}{3}$ となるので，曲線 $y=\sin x\left(0\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と $y=a\cos x\left(0\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の共有点の x 座標を α とおくと

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-a\cos x)\,dx\\ &= \Big[-\cos x-a\sin x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\\ &= -a+\cos\alpha+a\sin\alpha\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $a\cos\alpha=\sin\alpha$ かつ $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より $\tan\alpha=a$，$\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$，

$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ なので

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}=-a+\cos\alpha+a\sin\alpha \iff &\ \frac{1}{3}=-a+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+a\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\\ \iff &\ a+\frac{1}{3}=\sqrt{a^2+1}\\ \iff &\ a^2+\frac{2}{3}a+\frac{1}{9}=a^2+1 \text{ かつ } a\geqq -\frac{1}{3} \qquad \therefore\ a=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

よって求める a の値は $\boldsymbol{a=\dfrac{4}{3}}$.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。